BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.Ф.ИСМАИЛОВА

Бакинский Государственный Университет

В работе найдены условия на нижней границе спектра основного оператора для операторно-дифференциальных уравнений зависящих от двух переменных и показателя весовых пространств, которые обеспечивают существование и единственность регулярного решения одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвёртого порядка в весовых пространствах на всей оси.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H операторно-дифференциальное уравнение четвёртого порядка

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}+A^4u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in R^2 \quad (1)$$

где $f(x,y)$, $u(x,y)$ - векторнозначные функции, определённые в $R^2\equiv R\times R\equiv(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$, со значениями в пространстве H, а A - положительно-определенный самосопряженный оператор в H.

Обозначим через $L_2(R^2;H)$ гильбертово пространство вектор функций $f(x,y)$ со значениями в H, определенных почти всюду в R^2, измеримых и квадратично интегрируемых в R^2, т.е

$$\|f\|_{L_2(R^2;H)}=\left(\int_{R^2}\|f(x,y)\|^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}}<\infty .$$

На множестве $D(R^2;H)$- бесконечно дифференцируемых функций определим норму

$$\|u\|_{W_2^4(R^2;H)}=\left(\left\|\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|A^4u(x,y)\right\|^2_{L_2(R^2;H)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что $D(R^2;H)$ с нормой $\|u\|_{W_2^4(R^2;H)}$ является предгильбертовым пространством. Пополнение этого пространства обозначим через $W_2^4(R^2;H)$.

Теперь предположим, что $\gamma \in (-\infty, \infty)^2 = R^2$ ($\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$) и определим следующее гильбертово пространство

$$L_{2,\gamma}(R^2; H) = \left\{ f : f(x, y) e^{-\gamma_1 x - \gamma_2 y} \in L_2(R^2; H) \right\}$$

с нормой

$$\|f(x, y)\|_{L_{2,\gamma}(R^2;H)} = \left(\int_{R^2} \|f(x, y)\| e^{-2\gamma_1 x} e^{-2\gamma_2 y} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы полагаем, что при $\gamma = 0$ $L_{2,0}(R^2; H) = L_2(R^2; H)$

Аналогично определим пространство $W_{2,\gamma}^4(R^2; H)$, т.е $W_{2,\gamma}^4(R^2; H)$ есть пополнение пространства $D(R^2; H)$ с нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^4(R^2;H)} = \left(\left\| \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} \right\|_{L_{2,\gamma}(R^2;H)}^2 + \left\| \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} \right\|_{L_{2,\gamma}(R^2;H)}^2 + \left\| A^4 u(x, y) \right\|_{L_{2,\gamma}(R^2;H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Считаем, что $W_{2,0}^4(R^2; H) = W_2^4(R^2; H)$

Определение 1. Если при $f(x, y) \in L_{2,\gamma}(R^2; H)$ существует вектор-функция $u(x, y) \in W_{2,\gamma}^4(R^2; H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R^2, то её будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если для любого $f(x, y) \in L_{2,\gamma}(R^2; H)$ существует регулярное решение $u(x, y)$ уравнение (1), для которого имеет место следующая оценка

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^4(R^2;H)} \leq const \|f(x, y)\|_{L_{2,\gamma}(R^2;H)},$$

то уравнение (1) будем называть регулярно разрешимым в пространстве $W_{2,\gamma}^4(R^2; H)$.

В данной работе мы находим условия на спектр коэффициента A операторного уравнения (1) и на вектор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, при выполнении которых уравнение (1) оказывается регулярно разрешимым в пространстве $W_{2,\gamma}^4(R^2; H)$. Отметим, что когда A -сильно эллиптический оператор с дискретным спектром эта задача для одного переменного исследована в работе [1]. Для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эта задача рассмотрена в работе [2]. При некоторых условиях на рост резольвенты соответствующего пучка $\left(\lambda^4 E + \mu^4 E + A^4\right)^{-1}$ эта задача исследована в работе [3]. При $\gamma = 0$ эта задача для одного переменного исследована, например, в работе [4].

Обозначим через

$$P_0 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + A^4 u, \; u(x, y) \in W_{2,\gamma}^4(R^2; H).$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть A -положительно-определённый самосопряженный оператор, причём $\inf\limits_{\sigma\in\sigma(A)} \sigma = \mu_0 > 0$, вектор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ такой, что

$$\|\gamma\| = \sqrt[4]{\gamma_1^4 + \gamma_2^4} < \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \mu_0 .$$

Тогда уравнение (1) регулярно разрешимо.

Доказательство. Пусть $f(x, y) \in L_{2,\gamma}\left(R^2; H\right)$. В уравнении (1) сделаем замену

$$u(x, y) = v(x, y) e^{\gamma_1 x + \gamma_2 y} .$$

Тогда получим следующее уравнение в $L_{2,\gamma}\left(R^2; H\right)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_1\right)^4 v(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2\right)^4 v(x, y) + A^4 v(x, y) = f(x, y) e^{-\gamma_1 x - \gamma_2 y} .$$

Очевидно, что $v(x, y) = u(x, y) e^{-\gamma_1 x - \gamma_2 y} \in L_2(R^2; H)$, $f(x) e^{-\gamma_1 x - \gamma_2 y} \in L_2(R^2; H)$, здесь

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_1\right)^4 v(x, y) = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 4\gamma_1 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 6\gamma_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\gamma_1^3 \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma_1^4 \vartheta ,$$

а

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2\right)^4 v(x, y) = \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + 4\gamma_2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + 6\gamma_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4\gamma_2^3 \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma_2^4 \vartheta .$$

Обозначим через $g(x, y) = f(x, y) e^{-\gamma_1 x - \gamma_2 y}$. Тогда получаем следующее уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_1\right)^4 v(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2\right)^4 v(x, y) + A^4 v(x, y) = g(x, y) \qquad (2)$$

в пространстве $W_2^4(R^2; H)$.

Пусть $\hat{g}(\xi, \eta)$ - преобразование вектор-функции $g(x, y)$, т.е.

$$\hat{g}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R^2} g(x, y) e^{-ix - iy} dx dy , \qquad (3)$$

и рассмотрим вектор-функцию

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R^2} \left((i\xi + \gamma_1)^4 E + (i\eta + \gamma_2)^4 E + A^4 \right)^{-1} \hat{g}(\xi, \eta) e^{ix + iy} d\xi d\eta . \qquad (4)$$

Очевидно, что вектор-функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2) почти всюду в R^2. Покажем, что при выполнении условий теоремы вектор-функция $v(x, y)$ принадлежит пространству $W_2^4(R^2; H)$.

Очевидно, что

$$\hat{v}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R^2} v(x, y) e^{-ix - iy} dx dy = \left((i\xi + \gamma_1)^4 E + (i\eta + \gamma_2)^4 E + A^4 \right)^{-1} \hat{g}(\xi, \eta).$$

Покажем, что $v(x,y)\in W_2^4(R^2;H)$. По теореме Планшереля

$$\left\|\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|A^4 v\right\|^2_{L_2(R^2;H)}=\left\|\xi^4\hat{v}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+$$

$$+\left\|\eta^4\hat{v}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|A^4\hat{v}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(R^2;H)}. \qquad (5)$$

Поэтому, достаточно показать, что $\xi^4\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$, $\eta^4\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$ и $A^4\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$.

Очевидно, что

$$\left\|\xi^4\hat{v}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}=\left\|\xi^4\left((i\xi+\gamma_1)^4E+(i\eta+\gamma_2)^4E+A^4\right)^{-1}\hat{g}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}\le$$

$$\le\sup_{(\xi,\eta)}\left\|\xi^4\left((i\xi+\gamma_1)^4E+(i\eta+\gamma_2)^4E+A^4\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|\hat{g}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}\le$$

$$\le\sup_{(\xi,\eta)}\left\|\xi^4\left((i\xi+\gamma_1)^4E+(i\eta+\gamma_2)^4E+A^4\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|g(x,y)\right\|_{L_2(R^2;H)}. \qquad (6)$$

Теперь оценим норму $\left\|\xi^4\left((i\xi+\gamma_1)^4E+(i\eta+\gamma_2)^4E+A^4\right)^{-1}\right\|$ при любом $(\xi,\eta)\in R^2$. Из спектрального разложения оператора A следует, что при любом $(\xi,\eta)\in R^2$ имеет место оценка:

$$\left\|\xi^4\left((i\xi+\gamma_1)^4E+(i\eta+\gamma_2)^4E+A^4\right)^{-1}\right\|=\sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\xi^4\left((i\xi+\gamma_1)^4+(i\eta+\gamma_2)^4+\mu^4\right)^{-1}\right|\le$$

$$\le\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^4}{\left|(i\xi+\gamma_1)^4+(i\eta+\gamma_2)^4+\mu^4\right|}\le\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^4}{\mathrm{Re}\left((i\xi+\gamma_1)^4+(i\eta+\gamma_2)^4+\mu^4\right)}\le$$

$$\le\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^4}{\xi^4+\gamma_1^4+\eta^4+\gamma_2^4+\mu^4-6\xi^2\gamma_1-6\eta^2\gamma_2}=$$

$$=\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^4}{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2+\left(\eta^2-3\gamma_2^2\right)^2+\left(\mu^4-8\gamma_1^4-8\gamma_2^4\right)}=$$

$$=\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^4}{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2+\left(\mu^4-8\gamma_1^4-8\gamma_2^4\right)}=\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2-9\gamma_1^4+6\xi^2\gamma_1^2}{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2+\left(\mu^4-8\gamma_1^4-8\gamma_2^4\right)}=$$

$$=\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2+6\xi^2\gamma_1^2}{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2+\left(\mu^4-8\gamma_1^4-8\gamma_2^4\right)}\le\frac{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2}{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2+\left(\mu_0^4-8\gamma_1^4-8\gamma_2^4\right)}+$$

$$+6\gamma_1^2\cdot\frac{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)+3\gamma_1^2}{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2+\left(\mu_0^4-8\left(\gamma_1^4+\gamma_2^4\right)\right)}\le 1+6\gamma_1^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mu_0^4-8\left(\gamma_1^4+\gamma_2^4\right)}}+$$

$$+3\gamma_1^2\frac{1}{\mu_0^4-8\left(\gamma_1^4+\gamma_2^4\right)}.$$

Таким образом, из (4) получаем, что

$$\left\|\xi^4\hat{v}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}\le const\left\|g(x,y)\right\|_{L_2(R^2;H)},$$

т.е $\xi^4\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$. Аналогично получаем, что $\eta^4\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$. Теперь покажем, что $A^4\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2\left(R^2;H\right)$. Очевидно, что

$$\left\|A^4\hat{v}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}=\left\|A^4\left((i\xi+\gamma_1)^4E+(i\eta+\gamma_2)^4E+A^4\right)^{-1}\hat{g}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}.$$

При любом $(\xi,\eta)\in R^2$ из спектрального разложения оператора A получаем, что

$$\left\|A^4\left((i\xi+\gamma_1)^4E+(i\eta+\gamma_2)^4E+A^4\right)^{-1}\right\|\le\sup_{\mu\in\sigma(A)}\left\|\mu^4\left((i\xi+\gamma_1)^4+(i\eta+\gamma_2)^4+\mu^4\right)^{-1}\right\|\le$$

$$\le\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\mu^4}{\operatorname{Re}\left((i\xi+\gamma_1)^4+(i\eta+\gamma_2)^4+\mu^4\right)}=\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\mu^4}{\xi^4+\gamma_1^4+\gamma_2^4+\mu^4-6\xi^2\gamma_1^2-6\eta^2\gamma_2^2}=$$

$$=\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\mu^4}{\left(\xi^2-3\gamma_1^2\right)^2+\left(\eta^2-3\gamma_2^2\right)^2+\left(\mu^4-8(\gamma_1^4+\gamma_2^4)\right)}\le\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\mu^4}{\mu^4-8\left(\gamma_1^4+\gamma_2^4\right)}\le$$

$$\le\frac{\mu_0^4}{\mu_0^4-8\left(\gamma_1^4+\gamma_2^4\right)}.$$

Таким образом,

$$\left\|A^4\hat{v}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}\le\frac{\mu_0^4}{\mu_0^4-8\left(\gamma_1^4+\gamma_2^4\right)}\left\|g(x,y)\right\|_{L_2(R^2;H)},$$

т.е $A^4\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2\left(R^2;H\right)$. Следовательно, $v(x,y)\in W_2^4(R^2;H)$. Тогда $u(x,y)\in W_{2,\gamma}^4(R^2;H)$. Так как $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2), то $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1). Отсюда видно, что уравнение $P_0u=0$ имеет только нулевое решение из $W_{2,\gamma}^4(R^2;H)$. С другой стороны,

$$\left\|P_0u\right\|_{W_{2,\gamma}^4(R^2;H)}\le const\left\|u\right\|_{W_{2,\gamma}^4(R^2;H)}.$$

Поэтому из теоремы Банаха об обратном операторе вытекает, что существует обратный $P_0^{-1}:L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)\to W_{2,\gamma}^4\left(R;H\right)$, поэтому

$$\left\|u\right\|_{W_{2,\gamma}^4(R^2;H)}\le const\left\|f\right\|_{L_{2,\gamma}(R^2;H)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дублинский Ю.А. Смешанная задача для некоторых классов уравнений с частными производными. Труды Московского Математического общества, 1969, т. XX, с.203-298.
2. Ягубова Х.В. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат.наук, 2001 г., №2, с.127-136.
3. Асланов Г.И. О разрешимости и асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Успехи математических наук, 1993, в.4, с.172-173.
4. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Диссертация на соискание уч.степ.доктора.физ.-мат.наук, Баку: БГУ, 1994, 229 с.

DÖRDTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN BİR SİNFİNİN ÇƏKİLİ FƏZADA HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

M.F.İSMAYILOVA

XÜLASƏ

Məqalədə bütün oxda iki dəyişənli dörd tərtibli operator-diferensial tənliyin əsas operatorunun spektrinin aşağı sərhəddi ilə çəkili fəzanın göstəricisi arasında əlaqə tapılmışdır ki, bu çəkili fəzalarda iki dəyişənli dörd tərtibli operator tənliyin həllinin varlığı və yeganəliyi təmin edilir.

ON SOLVABILITY OF A CLASS OF THE OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER ON WEIGHTED SPACES

M.F.ISMAILOVA

SUMMARY

In this paper are found conditions on the lower boundary of the spectrum of the main operator for operationally-differential equation depending of two and of the order of the weighted spaces which provide existence and uniqueness of the regular solution of a class of the operationally-differential equation of the fourth order in weighted spaces on all axis.